* حل المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من المرتبة n ذات الأمثال الثابتة:

- يمكن تعميم الحالات الخاصة بحل المعادلات من المرتبة الثانية كالمعادلة من المرتبة n:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

نفرض أن $y = e^{\lambda x}$ حلاً للمعادلة المعطاة فتكون المعادلة المميزة:

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

والتي جذرها $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

ونحصل على الحلول المختلفة حسب العلاقة بين تلك الجذور:

(1) إذا كانت الحلول $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_n$ (أعداد حقيقية موجبة)

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}$$

حيث $c_1, c_2, \dots, c_n$ ثوابت.

(2) إذا كانت جميع الجذور حقيقية وأحد الجذور مكرر k من المرات:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots \lambda_k \quad , \quad \lambda_{k+1} \neq \lambda_{k+2} \neq \lambda_n$$

فإن الحل العام يأخذ الشكل:

$$y = [c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \dots + c_k x^{k-1}] e^{\lambda x}$$

$$+ c_{k+1} e^{\lambda_{k+1} x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}$$

③ إذا كانت الجذور $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \alpha + i\beta$

$\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \alpha - i\beta$

ويكون الحل العام للمعادلة على الشكل:

$$y = e^{\alpha x}\left[(c_1 + c_2 x + c_3 x^2)\cos\beta x + (c_4 + c_5 x + c_6 x^2)\sin\beta x\right]$$

**أمثلة**

1) أوجد حل مسألة القيمة الابتدائية: $y(0)=4$ , $y'(0)=8$ , $y''(0)=-4$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} = 0$$

**الحل**

$y = e^{\lambda x}$ , $\lambda^3 + 2\lambda^2 - 3\lambda = 0$

$\lambda(\lambda^2 + 2\lambda - 3) = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda+3)(\lambda-1) = 0$

$\lambda = 0, \quad \lambda = -3, \quad \lambda = 1$

$y = c_1 + c_2 e^{x} + c_3 e^{-3x}$

الحل الخاص ⇐ نحدد قيم الثوابت ⇐ ينتج من خلال الشروط المعطاة.

$y(0) = 4 \Rightarrow 4 = c_1 + c_2 + c_3 \quad \text{--- ①}$

$y' = c_2 e^{x} - 3c_3 e^{-3x}$

$y'(0) = 8 \Rightarrow 8 = c_2 - 3c_3 \quad \text{--- ②}$

$y'' = c_2 e^{x} + 9c_3 e^{-3x}$

$-4 = c_2 + 9c_3 \quad \text{③}$

⇐ الحل المشترك $c_1 = 0$ , $c_2 = 5$ , $c_3 = -1$

$y = 5e^{x} - e^{-3x}$

مثال 2 أوجد الحل العام للمعادلة $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$

الحل: $y = e^{\lambda x}$ , $(\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2)y = 0$

$(\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2)e^{\lambda x} = 0$

$[\lambda^2(\lambda+2) - (\lambda+2)]e^{\lambda x} = 0$

نخرج $(\lambda+2)$ عامل مشترك $\Leftarrow$ $(\lambda+2)(\lambda^2-1)e^{\lambda x} = 0$

$e^{\lambda x} \neq 0 \Rightarrow \lambda = -2, \quad \lambda = 1, \quad \lambda = -1$

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3$

$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-2x}$

مثال 3 أوجد الحل العام للمعادلة: $(D-2)^3(D+3)^2(D-4)y = 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$

$\lambda_4 = \lambda_5 = -3 \quad , \quad \lambda_6 = 4$

$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 x^2 e^{2x} + c_4 e^{-3x} + c_5 x e^{-3x} + c_6 e^{4x}$

مثال 4 أوجد الحل العام للمعادلة $y''' - 6y'' + 9y' = 0$

الذي يحقق الشروط الابتدائية $y(0) = 0, \; y'(0) = 2, \; y''(0) = -6$

الحل: $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda = 0$

$\lambda(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda-3)(\lambda-3) = 0$

$\lambda = 0, \; \lambda = 3, \; \lambda = 3$

$y = c_1 e^{0x} + c_2 e^{3x} + c_3 e^{3x}$

الحل العام للمعادلة $y = c_1 + c_2 e^{3x} + c_3 e^{3x}$

$y' = 3c_2 e^{3x} + c_3 e^{3x} + 3x c_3 e^{3x}$

$y'' = 9c_2 e^{3x} + 3c_3 e^{3x} + 3c_3 e^{3x} + 9x c_3 e^{3x}$

$y'' = 9C_2 e^{3x} + 6C_3 e^{3x} + 9xC_3 e^{3x}$

$y(0) = 0 = C_1 + C_2$

$y'(0) = 2 = 3C_2 + C_3$

$y''(0) = -6 = 9C_2 + 6C_3$

بالحل المشترك: $C_1 = -2,\ C_2 = 2,\ C_3 = -4$

نعوض في الحل العام: $y = -2 + 2e^{3x} - 4x e^{3x}$

**سؤال دورة** أوجد الحل العام لكل من المعادلتين التفاضليتين الآتيتين:

(a) $\cos(x+y)\,dx + (3y^2 + 2y + \cos(x+y))\,dy = 0$

(b) $x \cdot \frac{dy}{dx} - 2y = x^2$

**الحل:** (a) من المرتبة الأولى والدرجة الأولى:

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$

$M(x,y) = \cos(x+y) \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = -\sin(x+y)$

$N(x,y) = 3y^2 + 2y + \cos(x+y) \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = -\sin(x+y)$ $\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

فالمعادلة تامة:

$u = \int M(x,y)\,dx + \varphi(y)$ أو $u = \int N(x,y)\,dy + \varphi(y)$

$\Rightarrow u = \int \cos(x+y) + \varphi(y) \Rightarrow u = \sin(x+y) + \varphi(y)$

نفاضل بالنسبة لـ y فنجد:

$\frac{du}{dy} = \cos(x+y) + \varphi'(y) = N(x,y) = 3y^2 + 2y + \cos(x+y)$

$\varphi'(y) = 3y^2 + 2y \Rightarrow \varphi(y) = y^3 + y^2 + c$

$u = \sin(x+y) + y^3 + y^2 + c$

وهو الحل العام للمعادلة المعطاة.

(1)

$$x \cdot \frac{dy}{dx} - 2y = x^2$$

نقسم على $x$ ⟸ $\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x} y = x$

$$\frac{dy}{dx} - p(x) y = \varphi(x)$$

$$p(x) = \frac{-2}{x} \quad , \quad \varphi(x) = x$$

نحدد عامل التكميل: $I(x) = \int e^{p(x)dx} = \int e^{\frac{-2}{x} dx} = e^{\ln \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x^2}$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل دخلها.

« انتهت المحاضرة -^-^- »